



Prof. Dr. H.-D. Donner
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011
9. Dezember 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 8

Aufgabe 1: Seien $a, b > 0$ und setze

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie das Volumen von E .

Aufgabe 2: Seien $B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $h > 0$. Setze

$$K = \{((1-t)x, th) \mid x \in B, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Zeigen Sie, dass $v(K) = \frac{h}{n+1} \cdot v(B)$.

Aufgabe 3: Sei $r > 0$ und setze

$$D_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n |x_k| \leq r \right\}.$$

Bestimmen Sie das Volumen von D_n für $n \geq 1$.

Aufgabe 4: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und es gelte $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\int f \, dx = 0$.

Abgabe bis spätestens 11:30 Uhr am 20. Dezember 2010 im Übungskasten.



Andreas Fackler

20. Dezember 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 8

Aufgabe 1: Wegen $E \subseteq [-a, a] \times [-b, b]$ ist E beschränkt; als Urbild von $[0, 1]$ unter der stetigen Funktion $(x, y) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ist E abgeschlossen, also ist E kompakt und damit integrierbar.

Da die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(x, y) = (ax, by)$ linear, also stetig differenzierbar ist, und ihre Umkehrabbildung $(x, y) \mapsto (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$ ebenfalls linear ist, ist sie ein Diffeomorphismus. Ist $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe, so gilt $\mathbf{1}_K(x, y) = \mathbf{1}_E(\varphi(x, y))$. Mit dem Transformationssatz folgt:

$$\begin{aligned} v(E) &= \int \mathbf{1}_E(u, w) \, d(u, w) = \int \mathbf{1}_E(\varphi(x, y)) |\det \varphi'(x, y)| \, d(x, y) \\ &= \int \mathbf{1}_K(x, y) \left| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right| \, d(x, y) = \int \mathbf{1}_K(x, y) \cdot ab \, d(x, y) \\ &= ab \cdot v(K) = ab\pi \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbar und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so schreiben wir αA für $\{\alpha x \mid x \in A\}$. Es ist dann $\mathbf{1}_{\alpha A}(\alpha x) = \mathbf{1}_A(x)$ und die Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \alpha x$ ist ein Diffeomorphismus mit Jacobi-Matrix αE_n , wobei E_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix ist. Nach dem Transformationssatz ist also:

$$v(\alpha A) = \int \mathbf{1}_{\alpha A}(u) \, du = \int \mathbf{1}_{\alpha A}(\alpha x) |\det(\alpha E_n)| \, dx = \int \mathbf{1}_A(x) |\alpha^n| \, dx = |\alpha^n| v(A)$$

Diese Tatsache werden wir bei dieser und der folgenden Aufgabe benutzen.

Als Bild der kompakten Menge $B \times [0, 1]$ unter der stetigen Abbildung $(x, t) \mapsto ((1-t)x, th)$ ist K ebenfalls kompakt, also integrierbar.

Für $s \in [0, h]$ ist $K_s = \{(1 - \frac{s}{h})x \mid x \in B\} = (1 - \frac{s}{h})B$. Nach dem Satz von Fubini ist daher:

$$\begin{aligned} v(K) &= \int_0^h v(K_s) \, ds = \int_0^h v\left(\left(1 - \frac{s}{h}\right)B\right) \, ds = \int_0^h \left(1 - \frac{s}{h}\right)^n v(B) \, ds \\ &= -\frac{h}{n+1} \left(1 - \frac{s}{h}\right)^{n+1} \Big|_0^h v(B) = \frac{h}{n+1} v(B) \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Wegen $D_n \subset [-r, r]^n$ ist D_n beschränkt. Außerdem ist D_n Urbild der abgeschlossenen Menge $[0, r]$ unter der stetigen Funktion $x \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|$. Damit ist D_n kompakt, also integrierbar.

Für $x_n \in [-r, r]$ ist $(D_n)_{x_n} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x_1| + \dots + |x_{n-1}| \leq r - |x_n|\} = \frac{r - |x_n|}{r} D_{n-1}$.

Nach dem Satz von Fubini ist

$$\begin{aligned} v(D_n) &= \int_{-r}^r v((D_n)_{x_n}) \, dx_n = \int_{-r}^r v\left(\frac{r - |x_n|}{r} D_{n-1}\right) \, dx_n \\ &= \int_{-r}^r \left(\frac{r - |x_n|}{r}\right)^{n-1} v(D_{n-1}) \, dx_n = 2v(D_{n-1}) \int_0^r \left(\frac{r - x_n}{r}\right)^{n-1} \, dx_n \\ &= 2v(D_{n-1}) \cdot \left. \frac{-(r - x_n)^n}{nr^n} \right|_0^r = \frac{2r}{n} v(D_{n-1}). \end{aligned}$$

Wir zeigen damit per Induktion, dass $v(D_n) = \frac{(2r)^n}{n!}$ ist. Für $n = 1$ ist $D_n = [-r, r]$, also $v(D_n) = 2r = \frac{(2r)^1}{1!}$. Ist die Aussage für $n - 1$ gezeigt, so folgt:

$$v(D_n) = \frac{2r}{n} v(D_{n-1}) = \frac{2r}{n} \frac{(2r)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(2r)^n}{n!}$$

Aufgabe 4: Die Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto -x$ ist ein Diffeomorphismus mit Jacobi-Matrix $-E_n$, wobei E_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix ist. Mit dem Transformationssatz folgt also:

$$\int f(u) \, du = \int f(-x) |\det(-E_n)| \, dx = - \int f(x) |(-1)^n| \, dx = - \int f(x) \, dx$$

Damit muss das Integral 0 sein.